

УДК 517.53

## ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.А. ТАГИЕВА

*Бакинский Государственный Университет*  
*mtagiyeva@mail.ru*

*В работе рассмотрена обратная задача теории приближения в классе обобщенных аналитических функций, которая устанавливает степень гладкости функции в зависимости от скорости стремления к нулю её приближения.*

**Ключевые слова:** обратная задача теории приближения, обобщенные полиномы, обобщенные полиномы Фабера, обобщенный оператор Фабера.

В настоящей статье приводится ряд обратных теорем теории приближения в классе обобщенных аналитических функций (о.а.ф.): по известной скорости убывания приближения функции и заданным свойствам области её определения устанавливается степень гладкости функции класса  $U_{p,2}(A, B, D)$  [1].

Обобщенные аналитические функции класса  $U_{p,2}(A, B, D)$  совпадают с классом псевдоаналитических функций в смысле Берса, соответствующих паре  $(F, G)$ ,  $F, G \in U_{p,2}(A, B, C)$ . В наших рассуждениях нам потребуются конструкции и результаты обеих теорий. О связи между ними см. [2].

Приведем некоторые понятия и результаты из теории Берса, которыми будем пользоваться [3]. Каждая псевдоаналитическая функция в области  $D$  представима в виде

$$w(z) = \varphi(z)F(z) + \psi(z)G(z), \quad z \in D,$$

где  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  - вещественные функции комплексного переменного, определяемые формулами

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{Im}(\overline{w(z)} \cdot G(z))}{\operatorname{Im}(\overline{F(z)} \cdot G(z))}, \quad \psi(z) = -\frac{\operatorname{Im}(\overline{w(z)} \cdot G(z))}{\operatorname{Im}(\overline{F(z)} \cdot G(z))} \quad (1)$$

$$\operatorname{Im}(\overline{F(z)} \cdot G(z)) > 0.$$

$(F, G)$ - производная  $\dot{w}(z)$  от псевдоаналитической функции  $w(z)$  в каждой точке  $z_0 \in D$  определяется как конечный предел

$$\dot{w}(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w(z) - \varphi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z)}{z - z_0}.$$

$(F, G)$ - интеграл от функции  $w(z)$  по определению равен

$$\int_{\Gamma} w d_{(F,G)} z = F(z_1) \int_{\Gamma} G^* w dz + G(z_1) \int_{\Gamma} F^* w dz,$$

где

$$F^* = -\frac{2\bar{F}}{FG - \bar{F}\bar{G}}, \quad G^* = \frac{2\bar{G}}{FG - \bar{F}\bar{G}},$$

$\Gamma$  - спрямляемая кривая, соединяющая точки  $z_0$  и  $z$ , так что

$$\int_{z_0}^z \dot{w} d_{(F,G)} \xi = w(z) - \varphi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z) \quad (2)$$

[3].

**Принцип подобия.** Пусть функция  $w(z)$  псевдоаналитическая в области  $D$ . Тогда существует функция  $S(z) \in Lip_{\alpha}(\mathbb{C})$ ,  $\alpha = \frac{p-2}{p}$ ,  $p > 2$ , такая, что

$$f(z) = W(z)e^{S(z)}$$

голоморфна в  $D$ .

**Принцип максимума модуля.** Если  $w \in U_{p,2}(A, B, D)$ ,  $p > 2$ , и непрерывна в  $\bar{D}_1 = D \cup \Gamma$ , то

$$|w(z)| \leq M \max_{t \in \Gamma} |w(t)|, \quad z \in \bar{D},$$

где  $M$  - постоянная, зависящая от порождающей пары  $(F, G)$ .

**Формула Коши для производной.** Пусть функция  $w(z)$  псевдоаналитична в области  $D$  и непрерывна в  $\bar{D}$ . Тогда

$$\overset{(n)}{W}(z) = \frac{(-1)^n n!}{2\pi} \int_{\Gamma} Z_n^{(-n-1)}(i w(\xi) d\xi, \xi; z)$$

(здесь дифференцирование понимается по отношению к последовательности порождающих пар  $\{(F_n, G_n)\}$  [3].

Сначала приведем решение поставленной задачи для единичного круга  $U$ .

**Теорема 1.** Пусть  $w(z)$  определена в  $\bar{U}$  и для каждого  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , пусть существует обобщенный полином  $p_n(z)$  такой, что

$$\|w(z) - p_n(z)\|_C \leq \frac{K}{n^\alpha}, \quad z \in \bar{U}.$$

Тогда  $w(z) \in U_{p,2}(A, B, U)$ ,  $w(z) \in Lip_\beta(\bar{U})$ , где  $\beta = \min\left(\alpha, \frac{p-2}{p}\right)$ ,  $p > 2$ .

(Здесь  $p_n(z)$ - о.п. класса  $U_{p,2}(A, B, U)$ , записанный по формальным степеням относительно порождающей пары  $(F, G)$ ).

Для доказательства нам потребуются следующие леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $p_n(z)$ -о.п. и пусть

$$|p_n(z)| \leq K, \quad z \in \bar{U}.$$

Тогда

$$|p_n(z)| \leq M\rho^n, \quad z \in \{|z| \leq \rho\}, \quad \rho > 1.$$

(Буквой  $M$  мы будем обозначать постоянные, зависящие от порождающей пары  $(F, G)$ ).

Лемма 1 следует из принципа подобия и соответствующего результата для голоморфных функций.

**Лемма 2.** Если

$$|p_n(z)| \leq K, \quad z \in \{|z| = 1\},$$

тогда

$$|\dot{p}_n(z)| \leq M \cdot n, \quad z \in \{|z| \leq 1\}. \quad (3)$$

**Доказательство.** Пусть  $z_0 \in \{|z| = 1\}$ . По формуле Коши для псевдоаналитических функций

$$\dot{p}_n(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t-z_0|=\rho} Z_1^{(-2)} \left( \frac{p_n(t)}{i} dt, t; z_0 \right).$$

Оценивая этот интеграл и учитывая лемму 1, имеем

$$|\dot{p}_n(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M\rho^n 2\pi\rho}{\rho^2} = M\rho^{n-1}.$$

Беря  $\rho = 1 + \frac{1}{n}$ , получим

$$|\dot{p}_n(z_0)| \leq M \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} = Mn.$$

Так как эта оценка справедлива равномерно для всех  $z \in \{|z| = 1\}$ , то отсюда заключаем, что

$$|\dot{p}_n(z)| \leq Mn, \quad z \in \{|z| = 1\}.$$

По принципу максимального модуля

$$|\dot{p}_n(z)| \leq Mn, \quad z \in \bar{U}.$$

**Доказательство теоремы 1.** Из условия теоремы следует, что последовательность о.п.  $\{p_n(z)\}$  равномерно сходится к  $w(z)$  в  $\bar{U}$ . Поэтому  $w(z)$  является о.а.ф. в  $U$  и непрерывной в  $\bar{U}$ .

Рассмотрим

$$w(z) = p_2(z) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{2^{m+1}}(z) - p_{2^m}(z).$$

Для любых  $z_1, z_2 \in \{|z|=1\}$  имеем

$$\begin{aligned} w(z_1) - w(z_2) &= (p_2(z_1) - p_2(z_2)) + \\ &+ \left( \sum_{m=1}^{\mu} (p_{2^{m+1}}(z_1) - p_{2^m}(z_1)) - \sum_{m=1}^{\mu} (p_{2^{m+1}}(z_2) - p_{2^m}(z_2)) \right) + \\ &+ \left( \sum_{m=\mu+1}^{\infty} (p_{2^{m+1}}(z_1) - p_{2^m}(z_1)) - \sum_{m=\mu+1}^{\infty} (p_{2^{m+1}}(z_2) - p_{2^m}(z_2)) \right) = I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

где  $\mu$  - положительное число, которое будет определено позднее.

Так как  $p_n(z) \in U_{p,2}(A, B, C)$ ,  $p > 2$ , то

$$|I_1| = |p_2(z_1) - p_2(z_2)| \leq |z_1 - z_2|^{\frac{p-2}{2}}. \quad (4)$$

Учитывая (2), представим общий член  $I_2$  в виде

$$\begin{aligned} &(p_{2^{m+1}}(z_2) - p_{2^m}(z_2)) - (p_{2^{m+1}}(z_1) - p_{2^m}(z_1)) = \\ &= \int_{z_1}^{z_2} (\dot{p}_{2^{m+1}}(t) - \dot{p}_{2^m}(t)) d_{(F,G)} t + (\varphi_{2^{m+1}}(z) - \varphi_{2^m}(z_1)) \times (F(z_2) - F(z_1)) + \\ &+ (\psi_{2^{m+1}}(z) - \psi_{2^m}(z_1))(G(z_2) - G(z_1)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{2^{m+1}}(z) - \varphi_{2^m}(z_1) &= \frac{\overline{\text{Im}((p_{2^{m+1}}(z_1) - p_{2^m}(z_1)) \cdot G(z_1))}}{\text{Im}(\bar{F}(z_1) \cdot G(z_1))}, \\ \psi_{2^{m+1}}(z) - \psi_{2^m}(z_1) &= -\frac{\overline{\text{Im}((p_{2^{m+1}}(z_1) - p_{2^m}(z_1)) \cdot F(z_1))}}{\text{Im}(\bar{F}(z_1) \cdot G(z_1))}. \end{aligned} \quad (\text{см. (1)}). \quad (5)$$

Оценивая (3), получим

$$\begin{aligned} &|(p_{2^{m+1}}(z_2) - p_{2^m}(z_2)) - (p_{2^{m+1}}(z_1) - p_{2^m}(z_1))| \leq \\ &\leq M \max_{\{|z|=1\}} |\dot{p}_{2^{m+1}}(z) - \dot{p}_{2^m}(z)| \cdot |z_1 - z_2| + M \max_{\{|z|=1\}} |p_{2^{m+1}}(z) - p_{2^m}(z)|. \end{aligned} \quad (6)$$

Из условия теоремы следует, что

$$\left| p_{2^{m+1}}(z) - p_{2^m}(z) \right| \leq \frac{M}{2^{(m+1)\alpha}} + \frac{M}{2^{m\alpha}}, \{ |z| \leq 1 \}. \quad (7)$$

Поэтому из (3) имеем

$$\left| \dot{p}_{2^{m+1}}(z) - \dot{p}_{2^m}(z) \right| \leq \frac{M}{2^{m\alpha}} \cdot 2^{m+1} = M \cdot 2^{m-\alpha m+1}. \quad (8)$$

Учитывая (6) и (8), для  $I_2$  получим оценку

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq M |z_1 - z_2| \sum_{m=1}^M 2^{m-m\alpha+1} + M |z_1 - z_2| \left| \frac{p-2}{p} \right| \sum_{m=1}^M 2^{-m\alpha} \leq \\ &\leq M |z_1 - z_2| \cdot 2^{M(1-\alpha)} + M |z_1 - z_2| \frac{p-2}{p}. \end{aligned} \quad (9)$$

$I_3$  оцениваем с помощью (7):

$$|I_3| \leq M \sum_{m=\mu+1}^{\infty} 2^{-m\alpha} < \frac{M}{2^{\mu\alpha}}. \quad (10)$$

Таким образом, используя (4), (9) и (10), находим

$$\left| w(z_1) - w(z_2) \right| \leq M |z_1 - z_2| \frac{p-2}{p} + M |z_1 - z_2| \cdot 2^{\mu(1-\alpha)} + \frac{M}{2^{\mu\alpha}}. \quad (11)$$

Выберем теперь  $\mu$  так, чтобы

$$\left| z_1 - z_2 \right| < \frac{1}{2^\mu} < 2 \left| z_1 - z_2 \right|,$$

тогда

$$2^\mu < \frac{1}{\left| z_1 - z_2 \right|} < 2^{\mu+1}.$$

Из этих неравенств имеем

$$2^{\mu(1-\alpha)} < \frac{1}{\left| z_1 - z_2 \right|^{1-\alpha}} < \left| z_1 - z_2 \right|^{\alpha-1},$$

поэтому

$$\frac{1}{2^{\mu\alpha}} < K \left| z_1 - z_2 \right|^\alpha.$$

В этом случае неравенство (11) примет вид

$$\left| w(z_1) - w(z_2) \right| \leq M \left| z_1 - z_2 \right| \frac{p-2}{p} + M \left| z_1 - z_2 \right|^\alpha,$$

откуда следует, что  $w(z)$  является о.а.ф. в  $U$  и принадлежит классу

$Lip_\beta(\bar{U})$ , где  $\beta = \min\left(\alpha, \frac{p-2}{p}\right)$ ,  $p > 2$ . Теорема доказана.

С помощью обобщенного оператора Фабера [4] теорему 1 можно перенести с единичного круга на односвязную область с достаточно гладкой границей.

Пусть  $D$  - конечная односвязная область, ограниченная кривой Альпера  $\Gamma$  [4],  $D^* = \overline{C} \setminus \overline{D}$ ,  $\eta = \Phi(z)$  - функция, конформно и однолистно отображающая область  $D^*$  на область  $\{|\eta| > 1\}$  при условиях  $\Phi(\infty) = \infty$ ,  $\Phi'(\infty) > 0$ ;  $z = \psi(\eta)$  - обратная функция.  $W(z)$  - о.а.ф. в области  $D$ ,  $w(\eta)$  - о.а.ф. в круге  $U$ .

Обобщенный оператор Фабера для области  $D$

$$F(w; z) \equiv W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, t, D) w(\Phi(t)) dt - \Omega_2(z, t, D) \overline{w(\Phi(t))} dt, \quad z \in D, \quad (12)$$

отображает о.а.ф.  $w(z)$  в о.а.ф.  $W(z)$ , последовательность о.п.  $\{p_n(z)\}$ , записанных по о.п.  $w_n(z, 0)$  для единичного круга, в последовательность о.п.  $\{\Phi_n(z)\}$ , составленных по о.п. Фабера  $\Phi_n(z, D)$  для области  $D$ .

Обратный обобщенный оператор Фабера

$$F_1(w; \eta) \equiv w(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|t|=1\}} \Omega_1(\eta, t, \overline{U}) W(\psi(t)) dt - \Omega_2(\eta, t, \overline{U}) \overline{W(\psi(t))} dt, \quad |\eta| < 1, \quad (13)$$

осуществляет обратное отображение [4].

Обозначим через  $w_1(\eta)$  обобщенный оператор Фабера для  $\eta \in \{|\eta| > 1\}$ .

Учитывая обобщенную формулу Коши для о.а.ф. [1], представим (13) в виде

$$w_1(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|t|=1\}} (\Omega_1(t, \eta, U) - \Omega_2(\psi(t), \psi(\eta), U) \psi'(t)) W(\psi(t)) dt - \\ - (\Omega_2(t, \eta, U) - \Omega_2(\psi(t), \psi(\eta), U) \psi'(t)) \overline{W(\psi(t))} dt. \quad (14)$$

Для граничных значений интеграла (13) имеет место формула

$$w(\eta) = W(\psi(\eta)) + w_1(\eta), \quad \{|\eta| = 1\}. \quad (15)$$

Подставляя (14) в (15), имеем

$$w(\eta) = W(\psi(\eta)) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|t|=1\}} (\Omega_1(\psi(t), \psi(\eta), U) \psi'(t) - \Omega_1(t, \eta, U)) W(\psi(t)) dt - \\ - (\Omega_2(\psi(t), \psi(\eta), U) \psi'(t) - \Omega_2(t, \eta, U)) \overline{W(\psi(t))} dt, \quad |\eta| = 1.$$

Вычитая из этого равенства аналогичное равенство для о.п., получим

$$\begin{aligned}
w(\eta) - p_n(\eta) &= W(\psi(\eta)) - P_n(\psi(\eta)) - \\
&- \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} (\Omega_1(\psi(t), \psi(\eta), U)\psi'(t) - \Omega_1(t, \eta, U)) \cdot (W(\psi(t)) - P_n(\psi(t))) dt - \\
&- (\Omega_2(\psi(t), \psi(\eta), U)\psi'(t) - \Omega_2(t, \eta, U)) \overline{(W(\psi(t)) - P_n(\psi(t)))} dt.
\end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
\Omega_1(z, t) - \frac{1}{t-z} &= O\left(|z-t|^{-\frac{2}{p}}\right), \quad p > 2, \\
\Omega_2(z, t) &= O\left(|z-t|^{-\frac{2}{p}}\right), \quad p > 2,
\end{aligned}$$

перейдем в (16) к неравенствам, в результате находим

$$\|w - p_n\|_C \leq M \|W - P_n\|_C. \quad (17)$$

Таким образом, получаем следующую теорему.

**Теорема 2.** Пусть для функции  $W(z)$  в области  $\bar{D}$  справедливо неравенство

$$\|W - P_n\|_C \leq \frac{C}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (18)$$

Тогда  $W(z)$  является о.а.ф. в области  $D$  и принадлежит классу  $Lip_\beta(\bar{D})$ , где  $\beta = \min\left(\alpha, \frac{p-2}{p}\right)$ .

**Доказательство.** Из (18) следует, что  $W(z)$  является о.а.ф. в области  $D$  и непрерывной в  $\bar{D}$ . Из (17) находим, что

$$\|w - p_n\|_C \leq \frac{M}{n^\alpha}.$$

По теореме 1 функция  $w(\eta)$  - о.а.ф. в  $U$  и  $w(\eta) \in Lip_\beta(\bar{U})$ ,  $\beta = \min\left(\alpha, \frac{p-2}{p}\right)$ . Но тогда по свойству обобщенного оператора Фабера (12)  $W(z) \in Lip_\beta(\bar{D})$  [4]. Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции М.: Наука, 1988, 512с.
2. Тагиева М.А. О связи между некоторыми понятиями и формулами теории Векуа и Берса // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2013, №3.
3. Bers L. Theory of Pseudoanalytic Functions. New York University, New York, 1952, 190 p.
4. Тагиева М.А. О разложении обобщенных аналитических функций в ряд по обобщенным полиномам Фабера в замкнутой области // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2011, №4, с. 55-60.

**ÜMUMİLƏŞMİŞ ANALİTİK FUNKSIYALAR SINIFLƏRİNDƏ YAXINLAŞMALAR  
NƏZƏRİYYƏSİNİN TƏRS MƏSƏLƏSİ HAQQINDA**

**M.A.TAĞIYEVA**

**XÜLASƏ**

İşdə ümumiləşmiş analitik funksiyalar siniflərində yaxınlaşmalar nəzəriyyəsinin tərs məsələsinə baxılır, belə ki, funksiyanın hamarlıq dərəcəsini, onun yaxınlaşmalarının sıfıra getmək sürətindən asılılığı öyrənilir.

**Açar sözlər:** yaxınlaşmalar nəzəriyyəsinin tərs məsələsi, ümumiləşmiş çoxhədlilər, ümumiləşmiş Faber çoxhədliləri, ümumiləşmiş Faber operatoru.

**ON THE INVERSE PROBLEM OF APPROXIMATION THEORY IN THE  
CLASS OF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS**

**M.A.TAGIYEVA**

**SUMMARY**

In the present paper we consider the inverse problem of approximation theory in the class of generalized analytic functions.

**Key words:** inverse problem of approximation theory, generalized polynoms, Faber's generalized polynoms, Faber's generalized operator.

*Поступила в редакцию: 14.04.2014 г.*

*Подписано к печати: 04.07.2014 г.*